Pochodna funkcji – pojęcie i obliczanie pochodnej

Pochodna funkcji

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu U punktu x_0.
Oznaczmy:
Δx – przyrost zmiennej niezależnej x, gdzie $x \in U$ i $x \neq x_0$ ($\Delta x = x - x_0$),
Δy – przyrost wartości funkcji, jaki odpowiada przyrostowi Δx, tzn.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Definicja 1. *Ilorazem różnicowym* funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu Δx zmiennej x nazywamy wyrażenie:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Definicja 2. *Pochodną* funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą ilorazu różnicowego przy $\Delta x \to 0$ i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$ lub $\frac{df(x_0)}{dx}$. Mamy więc

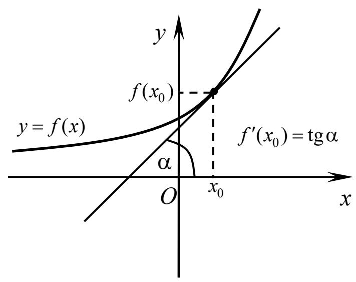
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Interpretacja geometryczna pochodnej

Pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu tej funkcji poprowadzonej w punkcie o odciętej x_0.

Zatem równanie stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie o odciętej x_0 ma postać:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



Rys. 1. Interpretacja geometryczna pochodnej

Przykład 1. Na podstawie definicji wyznaczyć pochodną funkcji $f(x)=x^2+2$ w punkcie x_0, a następnie zapisać równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $x_0=1$.

Rozwiązanie. Ponieważ $f(x)=x^2+2$, zatem:

$f(x_0)=x_0^2+2$, $\quad f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2+2=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+2$.

Obliczamy pochodną danej funkcji w punkcie x_0:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+2-x_0^2-2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0.$$

Dla $x_0=1$ mamy: $f(x_0)=f(1)=3$, $\quad f'(x_0)=f'(1)=2$. Równanie stycznej do wykresu danej funkcji w punkcie $x_0=1$ ma zatem postać:

$y=f'(1)(x-1)+f(1),$ a stąd

$y=2(x-1)+3,$

$y=2x+1.$

Definicja 3. *Pochodną lewostronną* funkcji f w punkcie x_0 (ozn. $f'_-(x_0)$) nazywamy lewostronną granicę właściwą ilorazu różnicowego, tzn.

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Podobnie definiujemy *pochodną prawostronną*:

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Twierdzenie 1. Funkcja f posiada pochodną w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy w tym punkcie istnieją pochodne jednostronne i są sobie równe.

Uwaga. Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna w punkcie* x_0, jeżeli posiada w tym punkcie skończoną pochodną. Z kolei funkcję f nazywamy *różniczkowalną w przedziale* X, jeżeli posiada ona pochodną w każdym punkcie tego przedziału. Wyznaczanie pochodnej danej funkcji nazywamy *różniczkowaniem* tej funkcji, a funkcję $f'(x)$ dla $x\in X$ nazywamy *funkcją pochodną* (lub krótko – *pochodną*) funkcji $f(x)$. W kolejnym rozdziale powiemy, w jaki sposób obliczać pochodną $f'(x)$.

Definicja 4. Jeżeli pochodna f' funkcji f jest różniczkowalna w zbiorze X, to jej pochodną nazywamy *pochodną rzędu drugiego* i oznaczamy symbolem f''.
Analogicznie określamy pochodne wyższych rzędów.

Wzory podstawowe oraz reguły różniczkowania

Przy obliczaniu pochodnych korzysta się na ogół z gotowych wzorów na pochodne oraz pewnych reguł różniczkowania.

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych

(1) $(c)' = 0$, (c – dowolna stała),

(2) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$, ($\alpha$ – dowolna stała),

(2.1) $(x)' = 1$,

(2.2) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

(2.3) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$,

(3) $\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$,

(4) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$,

(5) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$,

(6) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,

(7) $\left(\sin x\right)' = \cos x$,

(8) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$,

(9) $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

(10) $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

(11) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

(12) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

(13) $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

(14) $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Twierdzenie 2 (o działaniach na pochodnych).

Jeżeli istnieją pochodne $f'(x)$ i $g'(x)$, to:

(15) $\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)$,

(16) $\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

(17) $\left[k \cdot f(x)\right]' = k \cdot f'(x)$, k – stała,

(18) $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}, \text{ dla } g(x) \neq 0.$$

Przykład 2. Obliczyć pochodną funkcji:

a) $y = 4x^3 - x^2 + 7x - 4$, b) $y = 6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x}}$,

c) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^3\sqrt{x}}{x^2}$, d) $y = \operatorname{tg} x(1 - \ln x)$,

e) $y = \frac{2x^2}{4x^3 - 1}$.

Rozwiązanie.

a) Będziemy korzystać ze wzorów: (1), (2) oraz reguł: (15), (17). Wyjątkowo w tym przykładzie dokładnie rozpiszemy wszystkie wykonywane operacje. W kolejnych przykładach będziemy pomijać zapis pewnych działań.

$$y' = \left(4x^3 - x^2 + 7x - 4\right)' = \left(4x^3\right)' - \left(x^2\right)' + \left(7x\right)' - (4)' =$$

$$= 4\left(x^3\right)' - \left(x^2\right)' + 7\left(x\right)' - (4)' = 4\cdot 3x^2 - 2x + 7\cdot 1 - 0 = 12x^2 - 2x + 7.$$

b) $$y' = \left(6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(6x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-5} + x^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 6\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2\cdot(-5)x^{-6} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{10}{x^6} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

c) Tutaj najpierw przekształcimy daną funkcję:

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^3\sqrt{x}}{x^2} = \frac{x^{\frac{2}{3}} - 2x^3x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = x^{\frac{2}{3}-2} - 2x^{\left(3+\frac{1}{2}\right)-2} = x^{-\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

Stąd

$$y' = -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{x^7}} - 3\sqrt{x}.$$

d) Stosujemy wzór (16):

$$y' = (\operatorname{tg} x)' \cdot (1 - \ln x) + \operatorname{tg} x \cdot (1 - \ln x)' = \frac{1}{\cos^2 x}(1 - \ln x) + \operatorname{tg} x \cdot \left(0 - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{1 - \ln x}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x} .$$

e) Stosujemy wzór (18) na pochodną ilorazu:

$$y' = \frac{\left(2x^2\right)' \cdot \left(4x^3 - 1\right) - 2x^2 \cdot \left(4x^3 - 1\right)'}{\left(4x^3 - 1\right)^2} = \frac{4x \cdot \left(4x^3 - 1\right) - 2x^2 \cdot 12x^2}{\left(4x^3 - 1\right)^2} =$$

$$= \frac{16x^4 - 4x - 24x^4}{\left(4x^3 - 1\right)^2} = \frac{-8x^4 - 4x}{\left(4x^3 - 1\right)^2} .$$

Twierdzenie 3 (o pochodnej funkcji złożonej).
Jeżeli funkcja $h(x) = f(g(x))$ jest złożeniem funkcji g (wewnętrznej) i f (zewnętrznej) takich, że funkcja g ma pochodną w punkcie x, a funkcja f ma pochodną w punkcie u, gdzie $u = g(x)$, to funkcja $h(x)$ ma w punkcie x pochodną określoną wzorem

$$h'(x) = \left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(u) \cdot g'(x) .$$

Widzimy zatem, że pochodna funkcji złożonej jest iloczynem dwóch pochodnych: pochodnej funkcji zewnętrznej f (którą różniczkujemy względem zmiennej u) oraz pochodnej funkcji wewnętrznej g (którą różniczkujemy względem zmiennej x).

Przykład 3. Obliczyć pochodną funkcji:

a) $y = (3x^2 - 2)^{10}$,

b) $y = \sin x^3$,

c) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{x+1}$,

d) $y = 3^{6x - x^3}$,

e) $y = \mathrm{e}^{x^2+1} \sin 3x$,

f) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\mathrm{e}^{3x}}$,

g) $y = \ln\sqrt{x^2 + 1}$,

h) $y = x^{\cos x}$.

Rozwiązanie.

a) Funkcja $y=(3x^2-2)^{10}$ jest funkcją złożoną z funkcji potęgowej $f(u)=u^{10}$ oraz funkcji $u=g(x)=3x^2-2$. Korzystając z twierdzenia 3, wzorów podstawowych oraz reguł różniczkowania otrzymamy:

$$y'=\left[(3x^2-2)^{10}\right]'=\left(u^{10}\right)'=10u^9\cdot u'=10(3x^2-2)^9\cdot(3x^2-2)'=$$

$$=10(3x^2-2)^9\cdot 6x=60x(3x^2-2)^9.$$

b) Tutaj funkcją zewnętrzną jest funkcja $f(u)=\sin u$, a funkcją wewnętrzną: $u=x^3$. Możemy zatem zapisać:

$$y'=\left(\sin x^3\right)'=\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'=\cos x^3\cdot\left(x^3\right)'=\cos x^3\cdot 3x^2=3x^2\cos x^3.$$

c) Wykorzystując twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej oraz wzór na pochodną ilorazu, zapiszemy krótko:

$$y'=\left(\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1}=\frac{2}{2x^2+2}=\frac{1}{x^2+1}.$$

d) $y'=\left(3^{6x-x^3}\right)'=3^{6x-x^3}\ln 3\left(6-3x^2\right)=3\ln 3\left(2-x^2\right)3^{6x-x^3}$

e) Dana funkcja jest iloczynem dwóch funkcji złożonych. Wykorzystując odpowiednie reguły różniczkowania otrzymamy:

$$y'=\left(\mathrm{e}^{x^2+1}\right)'\cdot\sin 3x+\mathrm{e}^{x^2+1}\cdot\left(\sin 3x\right)'=\left(\mathrm{e}^{x^2+1}\cdot 2x\right)\cdot\sin 3x+\mathrm{e}^{x^2+1}\cdot(\cos 3x\cdot 3)=$$

$$=\mathrm{e}^{x^2+1}(2x\sin 3x+3\cos 3x).$$

f) $$y'=\frac{\left(\operatorname{tg}^2x\right)'\cdot\mathrm{e}^{3x}-\operatorname{tg}^2x\cdot\left(\mathrm{e}^{3x}\right)'}{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2}=\frac{2\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2x}\cdot\mathrm{e}^{3x}-\operatorname{tg}^2x\cdot\mathrm{e}^{3x}\cdot 3}{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{3x}\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2x}-\frac{3\sin^2x}{\cos^2x}\right)}{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2}=\frac{2\operatorname{tg}x-3\sin^2x}{\mathrm{e}^{3x}\cos^2x}.$$

g) Zauważmy, że mamy tutaj do czynienia z funkcją złożoną, której funkcja wewnętrzna ($u=\sqrt{x^2+1}$) jest również funkcją złożona. Zatem należy dwukrotnie skorzystać z twierdzenia 3 i wówczas pochodna danej funkcji będzie iloczynem trzech pochodnych:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x^2+1\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+1}.$$

h) Mamy tutaj do czynienia z funkcją postaci $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$. Aby obliczyć pochodną tego typu funkcji korzystamy ze wzoru:

$$\left[f(x)\right]^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} \quad \text{(gdzie } f(x)>0\text{)}.$$

W naszym przypadku otrzymamy

$$y' = \left(x^{\cos x}\right)' = \left(\mathrm{e}^{\cos x \ln x}\right)' = \mathrm{e}^{\cos x \ln x} \cdot (\cos x \cdot \ln x)' =$$

$$= \mathrm{e}^{\cos x \ln x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\sin x}\left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right).$$

Przykład 4. Obliczyć pochodną rzędu drugiego funkcji:

a) $y = 4x^3 - \cos x + 2\ln x$, b) $y = \mathrm{e}^{3x^2+1}$.

Rozwiązanie.

a) Pochodna rzędu drugiego jest pochodną pierwszej pochodnej. Obliczamy

$$y' = 12x^2 + \sin x + \frac{2}{x},$$

$$y'' = \left(y'\right)' = 24x + \cos x - \frac{2}{x^2}.$$

b) Obliczamy pochodną pierwszego rzędu

$$y' = \mathrm{e}^{3x^2+1} \cdot 6x = 6x\mathrm{e}^{3x^2+1}.$$

Aby obliczyć pochodną drugiego rzędu korzystamy ze wzoru na pochodną iloczynu

$$y'' = 6 \cdot \mathrm{e}^{3x^2+1} + 6x \cdot \mathrm{e}^{3x^2+1} \cdot 6x = 6(1+6x^2)\mathrm{e}^{3x^2+1}.$$

Różniczka funkcji oraz jej zastosowania

Niech funkcja f będzie różniczkowalna w punkcie x_0.

Definicja 5. *Różniczką* funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu Δx zmiennej niezależnej x nazywamy iloczyn $f'(x_0)\Delta x$ i oznaczamy symbolem dy.

Zauważmy, że $dx = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Możemy zatem zapisać:

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Różniczkę funkcji można wykorzystać w obliczeniach przybliżonych oraz do szacowania błędów pomiarów.

Okazuje się, że dla małych przyrostów dx zmiennej niezależnej x, mamy:

$$\Delta y \approx dy.$$

Stąd

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx$$

i dalej

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx.$$

Przykład 5. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\sqrt[3]{7,97}\ .$$

Rozwiązanie. Oznaczmy:

$f(x) = \sqrt[3]{x}\,,\quad x_0 = 8\,,\quad dx = -0,03\,.$

Możemy zapisać

$\sqrt[3]{7,97} = f(7,97) = f(8 + (-0,03)) \approx f(8) + f'(8) \cdot (-0,03)\,.$

Obliczamy:

$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2\,,$

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,, \text{ to } \ f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{12}\,,$$

Zatem

$$\sqrt[3]{7,97} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot (-0,3) = 2 - \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{10} = 2 - \frac{1}{40} = 2 - 0,025 = 1,975.$$

Załóżmy, że dwie wielkości x i y związane są zależnością $y = f(x)$ oraz, że pomiar wielkości x przeprowadzany jest z pewnym błędem Δ_x. Interesuje nas, jaki błąd bezwzględny Δ_y popełnimy wyznaczając wielkość y w oparciu o wzór $y = f(x)$ oraz zmierzoną wartość x_0 wielkości x. W celu oszacowania tego błędu można posłużyć się wzorem przybliżonym:

$$\Delta_y \approx |f'(x_0)|\Delta_x .$$

Przykład 6. Promień koła r zmierzony z dokładnością $\Delta_r = 0{,}1$ cm ma długość $r_0 = 22$ cm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole P tego koła?

Rozwiązanie. Aby ocenić błąd obliczeń skorzystamy ze wzoru:

$$\Delta_P \approx |P'(r_0)|\Delta_r .$$

Pole koła wyraża się wzorem

$$P = \pi r^2 .$$

Obliczamy pochodną

$$P' = 2\pi r .$$

Stąd

$$P'(r_0) = P'(22) = 2 \cdot \pi \cdot 22 = 44\pi .$$

Szacujemy dokładność obliczeń:

$$\Delta_P \approx |P'(r_0)|\Delta_r = 44\pi \cdot 0{,}1 = 4{,}4\pi \approx 13{,}32 .$$

Zatem błąd bezwzględny jest w przybliżeniu równy $13{,}32\ \mathrm{cm}^2$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć pochodną funkcji:

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x - 7$,

2. $y = -3x^7 + 2x^5 + \mathrm{e}^2$,

3. $y = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}$,

4. $y = 3\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[7]{x}$,

5. $y = \frac{2\sqrt{x} - x^2\sqrt[3]{x}}{x^3}$,

6. $y = 3\sin x + 5\cos x - 2^x$,

7. $y = \left(x^2 - 2\right)\sin x$

8. $y = (2\ln x - 5x^2)(3 - \mathrm{tg}\, x)$,

9. $y = \mathrm{e}^x \mathrm{ctg} x$,

10. $y = (2x - 3)\, 3^{2x}$,

11. $y = \frac{x^2}{x - 1}$,

12. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$,

13 $y=\dfrac{e^x}{x^3}$,

14. $y=\dfrac{x-\cos x}{1-\sin x}$,

15. $y=(7x-2)^3$,

16. $y=\sqrt{5x^2-2}$,

17. $y=\sin(3x+2)$ **,**

18. $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2-5x}}$,

19. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$,

20. $y=\cos^2(3x-1)$,

21. $y=4\mathrm{tg}\sqrt{x-2}$,

22. $y=3\ln\dfrac{5}{x-2}$,

23. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

24. $y=\dfrac{\sin x^2}{\sqrt{x}}$,

25. $y=\dfrac{2x+1}{\ln(2x+1)}$,

26. $y=5^{x^2-6x}$,

27. $y=\ln\left(x^2+3x+2\right)$,

28. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$,

29. $y=7e^{-x^2}$,

30. $y=e^{\cos^2 x}$,

31. $y=4\cdot 3^{5x}$,

32. $y=x^2\,5^x$,

33. $y=x\,e^{\cos^2 x}$

34. $y=(10x^2-1)e^{3x}$,

35. $y=\mathrm{arctg}\,x^2$,

36. $y=\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{x}$,

37. $y=3\arccos\dfrac{1}{2}x$,

38. $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

39. $y=\ln\left(\sin^3 2x\right)$,

40. $y=x^{3x}$,

41. $y=(\ln x)^x$,

42. $y=(\mathrm{tg}\,x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

Obliczyć pochodną rzędu drugiego funkcji:

43. $y=\arccos x$,

44. $y=\mathrm{arctg}\,2x$,

45. $y=\sin^2 x$,

46. $y=x\cos x$,

47. $y = xe^{-x^2}$,

48. $y = \mathrm{e}^{\cos x}$,

49. $y = \ln(x^2 - 3x)$,

50. $y = \log_2\left(x^2 + 1\right)$,

51. $y = \dfrac{\ln x}{x}$,

52. $y = \dfrac{\sin 2^x}{\cos 3^x}$.

Napisać równanie stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie x_0:

53. $f(x) = 2x^2 - 8,\ x_0 = 1$,

54. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1},\ x_0 = 2$,

55. $f(x) = \ln x,\ x_0 = \mathrm{e}$,

56. $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1$.

Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia:

57. $\ln 0{,}9$,

58. $\operatorname{arctg} 1{,}03$.

Znaleźć przybliżoną wartość funkcji

59. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ dla $x = 2{,}03$,

60. $f(x) = \sqrt{1 - x}$ dla $x = 0{,}2$.

61. Krawędź sześcianu zmierzona z dokładnością ± 1 mm ma długość 82 mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość tego sześcianu?

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch